

Ioan BALICA

Dumitru SĂVULESCU

Matematică

clasa a VII-a

II

art
educațional

ALGEBRĂ Capitolul 1. Calcul algebric

1.1.	Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	7
1.2.	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	11
1.3.	Ridicarea la putere cu exponent întreg a numerelor reale reprezentate prin litere	15
	<i>Teste de evaluare</i>	19
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A1)</i>	21
1.4.	Formule de calcul prescurtat	23
1.5.	Metode de descompunere în factori	29
	<i>Teste de evaluare</i>	39
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A2)</i>	41
1.6.	Ecuția de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{Q}$	43
	<i>Teste de evaluare</i>	47
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A3)</i>	49
1.7.	Probleme cu caracter aplicativ	51
1.8.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	52

ALGEBRĂ Capitolul 2. Ecuații și inecuații

2.1.	Relația de egalitate în mulțimea numerelor reale. Proprietăți	57
2.2.	Ecuații de gradul I cu o necunoscută. Ecuații reducibile la ecuații de gradul I cu o necunoscută	60
	<i>Teste de evaluare</i>	66
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A4)</i>	67
2.3.	Relația de inegalitate $\leq$ pe mulțimea numerelor reale. Proprietăți ale relației de inegalitate. Inegalități algebrice	69
2.4.	Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($<, \geq, \leq$), cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{Z}$	73
	<i>Teste de evaluare</i>	78
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A5)</i>	79
2.5.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor	81
	<i>Teste de evaluare</i>	85
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A6)</i>	87
2.6.	Probleme cu caracter aplicativ	89
2.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	90

ALGEBRĂ Capitolul 3. Elemente de organizare a datelor

3.1.	Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea punctelor în plan cu ajutorul sistemului de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan	97
------	--	----

3.2.	Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice	102
	<i>Teste de evaluare</i>	105
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A7)</i>	107
3.3.	Probabilitatea realizării unor evenimente.....	109
	<i>Teste de evaluare</i>	112
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (A8)</i>	113
3.4.	Probleme cu caracter aplicativ.....	115

GEOMETRIE Capitolul 4. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

4.1.	Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii	119
4.2.	Teorema catetei	122
4.3.	Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	124
	<i>Teste de evaluare</i>	129
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G1)</i>	131
4.4.	Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic	133
4.5.	Ariile poligoanelor studiate.....	138
	<i>Teste de evaluare</i>	146
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G2)</i>	149
4.6.	Probleme cu caracter aplicativ.....	151
4.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	153

GEOMETRIE Capitolul 5. Cercul

5.1.	Elemente în cerc. Coardă, arc, unghi la centru	157
5.2.	Unghi, triunghi și patrulater înscris în cerc	161
5.3.	Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc.....	165
	<i>Teste de evaluare</i>	170
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G3)</i>	171
5.4.	Poligoane regulate.....	173
5.5.	Lungimi și arii în cerc.....	176
	<i>Teste de evaluare</i>	178
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G4)</i>	179
5.6.	Probleme cu caracter aplicativ.....	181
5.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	182

SINTEZE Capitolul 6. Subiecte pentru evaluările finale

6.1.	Variante de subiecte pentru teză	187
6.2.	Variante de subiecte pentru evaluarea finală	192

Soluții	199
----------------------	-----

NUMERE RAȚIONALE

Tema 1.1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Tema 1.2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere

Tema 1.3. Ridicarea la putere cu exponent întreg a numerelor reale reprezentate prin litere

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual (A1)

Tema 1.4. Formule de calcul prescurtat

Tema 1.5. Metode de descompunere în factori

1.5.1. Metoda factorului comun

1.5.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat

1.5.3. Metode combinate de descompunere în factori

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual (A2)

Tema 1.6. Ecuația de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{Q}$

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual (A3)

Tema 1.7. Probleme cu caracter aplicativ

Tema 1.8. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Știm că $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = (2+7)\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$. În general, $2a + 7a = (2+7)a = 9a$ unde a este un număr real. Numerele $2a$ și $7a$ se numesc *termenii* sumei $2a + 7a$, iar numerele 2 și 7 poartă numele de *coeficienții* lui a . În suma $3x + 2y$ numerele reale 3 și 2 se numesc *coeficienți*, iar x și y reprezintă *partea literală*.

O *sumă algebrică* este o sumă în care unele numere reale sunt reprezentate prin litere. Termenii *asemenea* ai unei sume algebrice sunt acei termeni în care apar aceleași litere ridicate la aceleași puteri.

Exemplu. În suma algebrică $7a - 2xy^2 - 4a + \sqrt{5} + 0,9xy^2 + 11\sqrt{5} + 5a$ sunt asemenea următorii termeni:

- $7a$ cu $-4a$ și cu $5a$ (a căror sumă este $a(7 - 4 + 5) = 8a$);
- $-2xy^2$ cu $0,9xy^2$ (a căror sumă este $xy^2(-2 + 0,9) = -1,1xy^2$);
- $\sqrt{5}$ cu $11\sqrt{5}$ (a căror sumă este $\sqrt{5}(1 + 11) = 12\sqrt{5}$).

Adunând termenii asemenea, se spune că *se reduc termenii asemenea*, iar suma inițială este egală cu $8a - 1,1xy^2 + 12\sqrt{5}$.

Exercițiu rezolvat. Reduceți termenii asemenea din următoarea sumă algebrică:

$$-7x + 12a^2 - 6xy + 9a^2 + 20x + 6xy + a^2.$$

Rezolvare. Folosind proprietățile de asociativitate și comutativitate suma se scrie astfel:

$$-7x + 20x + 12a^2 + 9a^2 + a^2 - 6xy + 6xy = (-7 + 20)x + (12 + 9 + 1)a^2 + (-6 + 6)xy = 13x + 22a^2$$

Proprietățile adunării

1. Asociativitatea: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Comutativitatea: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.
3. 0 (zero) este element neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
4. Suma oricăror două numere opuse a și $-a$ este egală cu 0: $a + (-a) = -a + a = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.



1. Precizați coeficienții numerelor reale reprezentate prin litere din următoarele sume algebrice:

a) $5x - 11y$;

b) $2xy - 7y + 7x$;

c) $12a + 7ab - 3a^2$;

d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y$;

e) $\sqrt{3}x + \sqrt{5}y - 2\sqrt{6}z$;

f) $0,5x^2 + \sqrt{7}x^3y - \frac{2}{3}y^2$.

2. Scrieți opusul fiecăruia dintre următorii termeni:

a) $7x$;

b) $0,6x^2$;

c) $-2\sqrt{5}$;

d) $\sqrt{11}ax$;

e) $\frac{5}{3}a$; f) $-b^3y$; g) $0,2xyz$; h) $-\frac{\sqrt{2}}{3}a^2b^2$.

3. Reduceți termenii asemenea:

a) $5x - 7x$; b) $5a + 3a - 6a$; c) $4b + 10b - 2b + 3b$;
d) $9y - y$; e) $13m - 15m + 2m$; f) $23z - 11z - z + 19z$.

4. Reduceți termenii asemenea:

a) $2x + 3x - 7x + 12x$; b) $13y - 2y + (6y - 3y) - y$;
c) $(16a + 12a + 5a) - (31a - 22a)$; d) $-5b + 3b - 2b + (7b - b + 2b) - b$.

5. Efectuați:

a) $0,5x + 0,7x - 0,6x + 3,5x - 1,8x$; b) $2,25a - 1,65a + (3a - a) - (a - 0,7a)$;
c) $3,9y + (2,55y + 3,45y) + 0,1y$; d) $0,3b - (1,5b - 0,7b + 0,2b) + 2b$.

6. Efectuați:

a) $5x^2 + 8x^2 - 3x^2 - 2x^2 + 16x^2$; b) $a^3 + 3a^3 - 8a^3 + 12a^3 + (29a^3 - 27a^3)$;
c) $-7a^2 + 4a^2 + (13a^2 + a^2) - (-a^2)$; d) $(16x^2 - 2x^2 - 10x^2) - (23x^2 - 4x^2)$.

7. Efectuați:

a) $0,3x^2 - 0,2x^2 + (2,5x^2 - 1,7x^2 + x^2) - (4,6x^2 - 3,8x^2)$;
b) $-9,5a^2 + 7,75a^2 - 2,35a^2 + (a^2 - 0,3a^2 - 0,7a^2)$;
c) $(0,25y^3 - 0,75y^3 + 3,5y^3) - (12,6y^3 + 3,4y^3 - 17y^3)$;
d) $(1,2x^2y^2 + 2,8x^2y^2) - (4,9x^2y^2 - 3,2x^2y^2 - 2,6x^2y^2) + 0,1x^2y^2$.

8. Efectuați:

a) $x^2y + 5xy^2 - 3x^2y + 6xy^2 - 2xy^2 + 3x^2y$;
b) $(5a^2 + 3ab) + (b^2 - 2ab) - (a^2 + 3b^2 - 4ab) + (a^2 - b^2)$;
c) $(6m + 3n) - (2n + 3m + 5) - (3m - 4n - 6)$;
d) $(13m^2 + 2mn - n^2) - (2m^2 + 3mn + 4n^2) - (10m^2 + 2mn)$.

9. Efectuați:

a) $7\sqrt{2} + 11\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$;
b) $7\sqrt{2}x + 11\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}x$;
c) $2\sqrt{3}x - 5\sqrt{3}x + 12\sqrt{3}x + \sqrt{3}x - 10\sqrt{3}x$;
d) $5\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}x + \sqrt{3}x$.



10. Scrieți în spațiul punctat termenul corespunzător obținerii unei propoziții adevărate:

a) $15a - 13a + \dots = 20a$; b) $12x + 4x - \dots = 10x$;
c) $x^2 - 2x^2 + \dots + 7x^2 = 0$; d) $12ab - \dots - ab = 20ab$.

11. Scrieți numărul real $4x + 5y$ ca:

a) sumă de două numere reale oarecare;
b) sumă de trei numere reale oarecare;
c) diferență de două numere reale oarecare;

12. Calculați:

- a) $(2x+3y)-(4x+5y)-(10-4y)$; b) $(3x^2-7xy)-(xy+5y^2)-(x^2-y^2)$;
c) $(-3a^2+2a+4)-(5-a-3a^2)$; d) $6x-(3xy+3x-4x^2)-3x+x^2+4xy$.

13. Calculați:

- a) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} - 0,4x + 1, (6)x - x$; b) $\frac{29}{5}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 2, (3)x^2 - \frac{7}{6}x^2 + 2\frac{1}{10}x^2$;
c) $0, (3)x + 1\frac{1}{3}x - \left[1, (3)x - \frac{2}{3}x\right]$; d) $3, 7ab - 1, (4)ab + (1, 2ab - 0, 9ab) + 2, (6)ab$.

14. Calculați:

- a) $\left(x^2 + \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x^2}{3} + 2x\right) + \left(\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{4}\right)$;
b) $2\frac{3}{5}x^2 - \left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{3}x\right) + \left[1\frac{2}{5}x^2 + 0, (6)x\right] - 0, 2x^2$;
c) $[0, (7)x - 0, (6)a] + [0, (6)x - 0, (5)a] - \left(\frac{20}{45}x - \frac{10}{45}a\right)$;
d) $[2, (3)a - 1, (3)b] + [0, (6)a - 0, (6)b] - (3a - 2b)$.

15. Calculați:

- a) $(4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})x + (6\sqrt{2} - 3\sqrt{2})x - (8\sqrt{2} - \sqrt{2})x + 3\sqrt{2}x$;
b) $(5\sqrt{3} - \sqrt{12})a + (\sqrt{27} - 7\sqrt{3})a + (2\sqrt{75} - 3\sqrt{108})x$;
c) $(2\sqrt{28} + \sqrt{63})xy - \sqrt{50}xy + (\sqrt{8} + \sqrt{18})xy + \sqrt{175}xy$;
d) $3\sqrt{6}x^2 + (2\sqrt{150} - \sqrt{54})x^2 + (\sqrt{192} - 2\sqrt{75})x^2 + 7\sqrt{3}x^2 - \sqrt{6}x^2$;

16. Fie numerele: $A = 2x - 3 + a^2$, $B = 5 + 4x - 7a^2$ și $C = 11 - 9x$. Calculați:

- a) $A + B$; b) $A - B$; c) $A + B + C$;
d) $A + (B - C)$; e) $-A + B - C$; f) $(A - B) + (B - C) + (C - A)$.

17. Calculați valoarea expresiei $E = \frac{x+2y}{x+5} + \frac{x-1}{y-6}$ pentru $x = 1$ și $y = 0$.

18. Considerăm numărul $N = (3x^2 + y^2) - (x^2 + 1) + (1 - y^2)$.

- a) Calculați N , dacă $x = 2$ și $y = -4$;
b) Arătați că $N \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

19. Dacă $2x + 3y = 13$ și $3x + 2y = 12$, calculați:

- a) $5x + 5y$; b) $x - y$; c) $6x + 4y$; d) $4x + 6y$.

20. Fie $A = (0, 5x^2 + 3, 5xy + 3) - (2, 7x^2 + 1, 75 + 1, 3xy) - (1, 25 + 2, 2xy - 3, 2x^2)$.

Arătați că A este pătrat perfect, pentru orice valori ale numerelor naturale x și y .



21. Scrieți în spațiul punctat termenul (sau termenii) corespunzător(i) obținerii unei propoziții adevărate:

a) $x^2 - 5a + 3x^2 + \dots = 7a + 4x^2$; b) $3xy + \dots + 5x^2 - 2x = x^2 + 2xy$

c) $x + \dots + 17 - 5x = -4x$; d) $(x - 4xy^2) - 8x + \dots = 0$.

22. Efectuați:

a) $x + 2x + 3x + \dots + 10x$;

b) $x + 2x + 3x + \dots + 69x$;

c) $x^2 + 2x^2 + 3x^2 + \dots + 10x^2 - 2x - 4x - 6x - \dots - 20x$;

d) $5a + 10a + 15a + \dots + 60a + 3b + 6b + 9b + \dots + 36b$;

e) $(4x - b^2) + (8x - 2b^2) + (12x - 3b^2) + (16x - 4b^2) + (20x - 5b^2)$;

23. Dacă $3x - 2y - 6 = 0$, calculați $(11 + 4y - 6x)^{2014}$.

24. Scrieți numărul $A = (4x^2 - 9 + 3y^2) - (3x^2 + 2y^2) + (14 - y^2)$ ca sumă de două pătrate.

25. Calculați:

a) $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}x - \frac{9}{\sqrt{3}}x\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{18}}x + \frac{10}{\sqrt{75}}x\right) - \left(\frac{24}{2\sqrt{48}}x - \frac{12}{\sqrt{108}}x\right)$;

b) $\left(5\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)x + \left(\sqrt{162} + \frac{8}{\sqrt{32}}\right)x - \left(\frac{14}{\sqrt{98}} + \frac{12}{\sqrt{72}}\right)x$;

c) $\left(\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{4}{5}}\right)x - \left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{36}{5}}\right)x + \left(\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)x$.

d) $\left(2\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)x - \left(3\sqrt{5} + \frac{10}{\sqrt{5}}\right)y + \left(5\sqrt{7} + \frac{14}{\sqrt{7}}\right)z - (3\sqrt{3}x - 5\sqrt{5}y + 7\sqrt{7}z)$.

26. Determinați valorile lui x , astfel încât numărul A să fie natural, unde

$$A = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}x + \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}x - \sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}x.$$

Probleme de șapte stele

27. Fie $N = \frac{|x + y| + |x - y|}{2x}$, unde $x > 0, y \geq 0$.

a) Calculați N dacă $x \geq y$;

b) Scrieți câte o valoare pentru x și y , astfel încât $N = 2$.

28. Determinați numerele raționale x și y , astfel încât $\sqrt{3}x + 2x - 2\sqrt{3}y - 2y = -1$.

29. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sqrt{a-2} + \sqrt{b+3} + \sqrt{a+b+c} = 0$. Calculați $2a + 3b + 4c$.